Apellido y nombres: ....

Padrón: .... Correo electrónico: ....

Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Quinta fecha. 31 de julio de 2015.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea $F(z)$ la rama del logaritmo cuyo corte es $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\,, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$. Calcular:

i) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3/2} F(z)\, dz$, ii) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3/2} \frac{F(z)}{z-1}\, dz$,

iii) $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{F(z)}{(z+ie)^2}\, dz$ con $C : |z+i| + |z+4i| = 4$,

iv) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} F'(z)\, dz$ con $\gamma \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ una curva que une $-\sqrt{3}+i$ con $e^{3i\pi/4}$.

(b) Plantear y resolver el problema del potencial eléctrico en una placa semicircular, de radio 1, en el semiplano superior, si en la frontera circular toma el valor 0 y en el eje real toma el valor 1.

Ejercicio 2.

(a) Resolver:

$$\begin{cases} 9\, u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen} x \cos\, x + 12 \operatorname{sen}(13x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

y describir un sistema físico que pueda ser modelado por este problema.

(b) Calcular la serie trigonométrica de $f(x) = x^2$, para $-\pi \leq x < \pi$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia puntual de esta serie en $\mathbb{R}$? ¿Y sobre la convergencia uniforme? Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Ejercicio 3. Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$, $(a > 0)$:

(a) usando residuos;

(b) a partir de la transformada de Fourier de la función $g(t) = e^{-a|t|}$.

Ejercicio 4.

(a) Resolver, mediante transformada de Laplace, la siguiente ecuación integral:

$$y(x) = x^3 + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, y(t) dt \quad x \geqslant 0$$

y demostrar las propiedades utilizadas.

(b) Probar que si f es continua a trozos y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ entonces $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.